GMA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA

LISTA 2
Cálculo 1 - 2023.2

Introdução ao Limite
Teorema do Confronto
Limite Trig. Fundamental
Limites infinitos e no infinito

Exercício 1

Em cada um dos gráficos a seguir, discuta a existência dos limites laterais e do limite propriamente dito nos pontos a indicados.

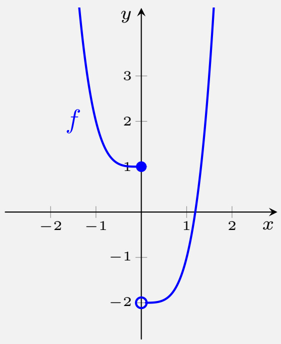


Figura 1: : $a = 0$

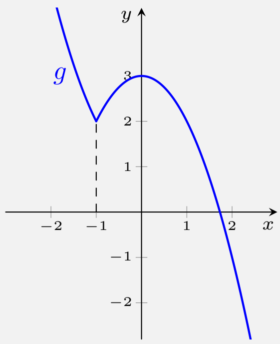


Figura 2: : $a = -1$

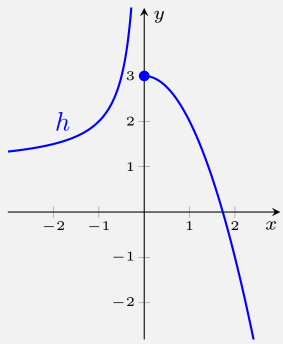
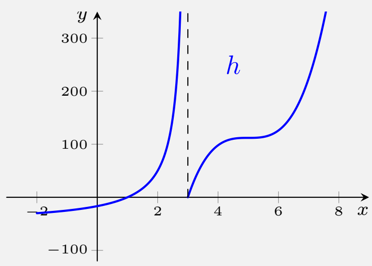


Figura 3: : $a = 0$

Exercício 2

Considerando o gráfico de h representado à direita, determine caso exista o

$$\lim_{x\to 0} h(x^2+3).$$



Exercício 3

Em cada um dos exercícios abaixo calcule o limite (se existir) das funções no ponto a indicado. Se o limite não existir, explique por quê.

1. $a = 1,\ \ f(x) = \frac{3x-5}{2x+1}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-1/2\}$
2. $a = \pi \quad f(x) = \ln(x)\cdot \operatorname{sen}(x), \quad x \in (0,\infty)$
3. $a = \pi/4,\ \ f(x) = \cos(x) - \operatorname{sen}(x), \quad x \in \mathbb{R}$
4. $a = 1^+,\ \ f(x) = \frac{\ln(x)}{e^x}, \quad x > 1$
5. $a = 2,\ \ f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{se } x > 2 \\ 3x-1 & \text{se } x < 2 \end{cases}$
6. $a = 2,\ \ f(x) = \begin{cases} 2x+3 & \text{se } x > 2 \\ 3x-1 & \text{se } x < 2 \end{cases}$

Exercício 4

Considere:

$$f(x) = \begin{cases} e^x + 2 & \text{se } x > 1 \\ 3x+1 & \text{se } x < 1 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad g(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{se } x < 0 \\ x^3 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Estude $\lim_{x\to 0} f \circ g(x)$.

Exercício 5

Em cada um dos itens abaixo calcule os limites laterais (se existirem) e discuta a existência do limite no ponto a indicado:

1. $a = 2, \quad f(x) = \dfrac{(x^2-4)^2}{(x-2)^2(x+3)}$
2. $a = 0, \quad f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$
3. $a = 1, \quad f(x) = \dfrac{\ln(x^2)}{2x-4}$
4. $a = 1, \quad f(x) = \dfrac{|x-1|}{x^2-1}$

Exercício 6

Em cada um dos itens abaixo, determine:

1. $\lim_{x\to -1} \dfrac{2x^2-3x-5}{x+1}$
2. $\lim_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{4x+1}-3}{x-2}$
3. $\lim_{x\to -3} \dfrac{x^3+5x^2+7x+3}{2x^3+9x^2+10x+3}$
4. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$
5. $\lim_{x\to -1} \dfrac{\sqrt[3]{x}+1}{x+1}$
6. $\lim_{x\to a} \dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}}{x-a}$, $a \neq 0$.

Exercício 7

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função tal que $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 1$. Determine:

1. $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(3x)}{x}$
2. $\lim_{x\to 1} \dfrac{f(x-1)}{x-1}$

Exercício 8

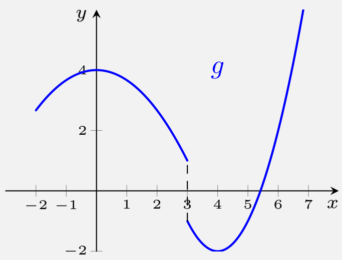
Determine:

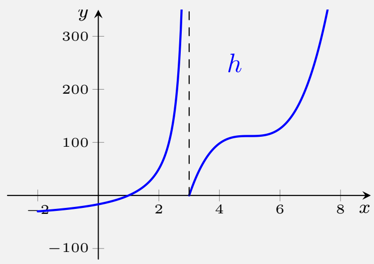
1. $\lim_{x\to 0} x^2 \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)$
2. $\lim_{x\to 0} x^{27} \cos\left(\dfrac{1}{49x}\right)$
3. $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\, e^{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right)}$
4. $\lim_{x\to 0} (\cos(x)-1) \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)$
5. $\lim_{x\to -1} \left(2x^2+x-1\right) \cos\left(\dfrac{1}{x+1}\right)$

Exercício 9

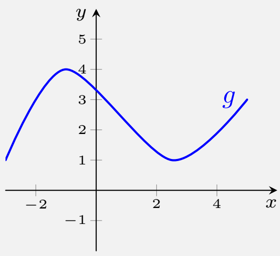
Considerando os gráficos de g e h dados, ache os limites laterais de f no ponto indicado.

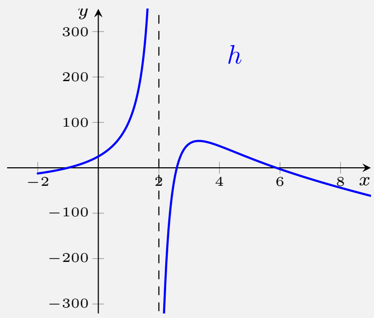
1. $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$, no ponto $x = 3$





2. $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$, no ponto $x = 2$





Exercício 10

Determine:

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen}(2020x)}{x}$
2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{tg}(5x)}{x}$
3. $\lim\limits_{x \to p} \dfrac{\text{tg}\,(x-p)}{x^2 - p^2}$; $p \neq 0$
4. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\text{sen}(x-3)}{|x^2 - 2x - 3|}$
5. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1 - \text{sen}(x)}{2x - \pi}$

Exercício 11

Calcule os limites:

1. $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{1}{|x-1|}$
2. $\lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{2x+7}{(3-x)^2}$
3. $\lim\limits_{x \to 5^-} \dfrac{x-5}{|x^2 - 7x + 10|}$
4. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(x+1)^2}{x}$
5. $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt[3]{x^5 + 3x - 8}$
6. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x-5}{x^2 + 3x + 4}$
7. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x-3}{7x+2}$
8. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - 2}{3 - x}$
9. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x+2}{\sqrt{9x^2 - 3}}$
10. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{9x+3}{\sqrt[3]{8x^3 - 3}}$
11. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x + \sqrt{x}}}{\sqrt{x+1}}$
12. $\lim\limits_{x \to +\infty} x(\sqrt{x^2+5} - x)$
13. $\lim\limits_{x \to -\infty} (\sqrt[3]{x^3+2} - \sqrt[3]{x^3-2})$

Exercício 12

Determine, caso existam, as equações das assíntotas verticais e horizontais do gráfico das funções abaixo.

1. $f(x) = \dfrac{3x}{x-1}$
2. $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2+4}}$
3. $f(x) = \dfrac{2x^2+1}{2x^2-3x}$

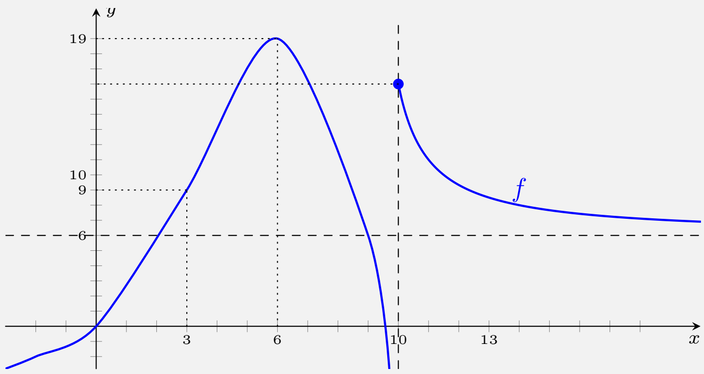
Exercício 13

Determine os valores de a e b de modo que

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^2+bx-1}{x+2} - ax\right) = 0.$$

Exercício 14

Seja f a função dada pelo gráfico a seguir:



Baseando-se no gráfico de f, responda os seguintes itens:

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
3. $\lim\limits_{x\to10^-} f(x)$
4. $\lim\limits_{x\to10^+} f(x)$
5. Determine, caso existam, as equações das assíntotas verticais e horizontais deste gráfico.

Exercício 15

Dê exemplos de funções f e g tais que

1. $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = 0, \quad \lim\limits_{x\to0^+} g(x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0, \quad \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$
3. $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$
4. $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$

Exercício 16

Calcule os limites abaixo

1. $\lim_{x\to 0} x\,\operatorname{sen}(x)$
2. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{4x^3+3x+\operatorname{sen}(x)}{3x^3-x^2}$
3. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{x^2+3x+2\operatorname{sen}(e^x)\cos(x)}{x^2+2x}$

Exercício 17

Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $-x^2+3x \leqslant f(x) < \dfrac{x^2-1}{x-1}$ para todo $x\neq 1$. Diga se existe $\lim_{x\to 1} f(x)$ e calcule este limite, caso exista.

Exercício 18

Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $|f(x)-3|\leqslant 2|x-1|$ para todo $x\in\mathbb{R}$. Calcule $\lim_{x\to 1} f(x)$, caso exista.

Exercício 19

Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $|f(x)|\leqslant x^4$ para todo $x\in\mathbb{R}$. Calcule $\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$.

Solução do Exercício 1

Na Figura 1 temos que o limite à esquerda vale 1, o limite à direita vale -2. Não existe o limite em $a=0$ pois os limites laterais são diferentes. Na Figura 2 temos que o limite à esquerda vale 2, o limite à direita vale 2. Portanto, $\lim_{x\to a} f(x)=2$. Na Figura 3 temos que o limite à esquerda não eiste pois a função não se aproxima de nenhum valor finito, o limite à direita vale 3. Não existe o limite em $x=a$.

Solução do Exercício 2

Temos que $\lim_{x\to 0^-} h(x^2+3)=\lim_{y\to 3^+} h(y)=0$ e $\lim_{x\to 0^+} h(x^2+3)=\lim_{y\to 3^+} h(y)=0$.
Como os limites laterais são iguais, então $\lim_{x\to 0} h(x^2+3)=0$.

Solução do Exercício 3

1. $-2/3$;
2. 0;
3. 0;
4. 0;
5. $\lim_{x\to 2^+} f(x)=5$, e $\lim_{x\to 2^-} f(x)=5 \implies \lim_{x\to 2} f(x)=5$
6. $\lim_{x\to 2^+} f(x)=7$ e $\lim_{x\to 2^-} f(x)=5 \implies \nexists \lim_{x\to 2} f(x)$

Solução do Exercício 4

Se $x\to 0^-$, $g(x)\to 1^+$, porque para valores de x menores que 0, $g(x)=x^2+1$ e $x^2+1>1$. Se $x\to 1^+$, $f(x)\to e+2$. Portanto, $\lim_{x\to 0^-} f\circ g(x)=e+2$. Se $x\to 0^+$, $g(x)\to 0^+$ e $\lim_{x\to 0^+} f(x)=1$. Portanto $\lim_{x\to 0^+} f\circ g(x)=1$. Conclusão: Não existe o limite da composta, porque os limites laterais são diferentes.

Solução do Exercício 5

1. $16/5$;
2. 0;
3. 0;
4. O limite não existe pois os limites laterais são distintos, $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{|x-1|}{x^2-1} = \dfrac{1}{2}$ e $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{|x-1|}{x^2-1} = -\dfrac{1}{2}$

Solução do Exercício 6

1. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{2x^2-3x-5}{x+1} = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{(x+1)(2x-5)}{x+1} = \lim\limits_{x\to -1}(2x-5) = -7$

2. $$\begin{aligned}\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{4x+1}-3}{x-2} &= \lim_{x\to 2} \frac{(\sqrt{4x+1}-3)}{(x-2)} \cdot \frac{(\sqrt{4x+1}+3)}{(\sqrt{4x+1}+3)} \\ &= \lim_{x\to 2} \frac{4(x-2)}{(x-2)(\sqrt{4x+1}+3)} = \lim_{x\to 2} \frac{4}{(\sqrt{4x+1}+3)} = \frac{2}{3}\end{aligned}$$

3. $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^3+5x^2+7x+3}{2x^3+9x^2+10x+3} = \lim\limits_{x\to -3} \dfrac{(x+1)^2(x+3)}{(x+1)(x+3)(2x+1)} = \lim\limits_{x\to -3} \dfrac{(x+1)^2}{(x+1)(2x+1)} = \dfrac{2}{5}$

4. $$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} &= \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} \cdot \frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{1+x-(1-x)}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{2x}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{2}{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} = \frac{2}{2} = 1\end{aligned}$$

5. $$\begin{aligned}\lim_{x\to -1} \frac{\sqrt[3]{x}+1}{x+1} &= \lim_{x\to -1} \frac{\sqrt[3]{x}+1}{x+1} \cdot \frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1} \\ &= \lim_{x\to -1} \frac{x+1}{(x+1)(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1)} = \lim_{x\to -1} \frac{1}{(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1)} = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

6. $$\begin{aligned}\lim_{x\to a} \frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}}{x-a} &= \lim_{x\to a} \frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}}{x-a} \cdot \frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{ax}+\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{ax}+\sqrt[3]{a^2}} \\ &= \lim_{x\to a} \frac{x-a}{(x-a)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{ax}+\sqrt[3]{a^2})} = \lim_{x\to a} \frac{1}{(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{ax}+\sqrt[3]{a^2})} = \frac{1}{3\sqrt[3]{a^2}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{3a}\end{aligned}$$

Solução do Exercício 7

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(3x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(3x)\cdot 3}{x\cdot 3}$.

$$= 3\cdot\lim_{x\to 0}\frac{f(3x)}{3x} = 3\cdot\lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{t} = 3$$

tomando $t=3x$ temos que $t\to 0$ quando $x\to 0$

Lembrando que $\lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{t}=1$

2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x-1)}{x-1}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(t)}{t}=1.$

Tomando $t=x-1$ temos que $t\to 0$ quando $x\to 1$

Solução do Exercício 8

Em todos os items aplicaremos o teorema do anulamento. Para isso, lembramos que precissamos comprovar que a função, cujo limite queremos calcular, se pode escrever como produto de uma função limitada por uma função com limite zero.

1. $\lim\limits_{x\to 0} x^2\cdot \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)=0$

$-1\le \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)\le 1$ (limitada)

$\lim\limits_{x\to 0} x^2=0$

2. $\lim\limits_{x\to 0} x^{27}\cdot \cos\left(\dfrac{1}{49x}\right)=0$

$-1\le \cos\left(\dfrac{1}{49x}\right)\le 1$ (limitada)

$\lim\limits_{x\to 0} x^{27}=0$

3. $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}\cdot e^{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right)}=0.$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}=0$

$$\left.\begin{array}{r}-1\le \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{x}\right)\le 1\\ e^x \quad \text{crescente}\end{array}\right\} \Longrightarrow e^{-1}\le e^{\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)}\le e \text{ (limitada)}$$

4. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos(x)-1)\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)=0$

$-1\le \operatorname{sen}\dfrac{1}{x}\le 1$ (limitada)

$\lim_{x\to 0}(\cos(x)-1)=0$

5. $\lim\limits_{x\to -1}(2x^2+x-1)\cdot\cos\left(\dfrac{1}{x+1}\right)=0$

$-1\le \cos\left(\dfrac{1}{x+1}\right)\le 1$ (limitada)

$\lim\limits_{x\to -1} 2x^2+x-1=0$

Solução do Exercício 9

1. $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=0;\quad \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=-\infty$

2. $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=0;\quad \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=0$

Solução do Exercício 10

Tomando $y = 2020x$ então $y \to 0$ quando $x \to 0$

1. $$\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}(2020x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}(2020x)\cdot 2020}{x\cdot 2020} = 2020 \cdot \lim_{y\to 0} \frac{\text{sen}(y)}{y} = 2020$$

2. $$\lim_{x\to 0} \frac{\text{tg}(5x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}(5x)}{x\cos(5x)} = \lim_{h\to 0} 5\frac{\text{sen}(h)}{h} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos(5x)} = 5$$

   Fazendo $h = 5x$ temos que $h \to 0$ quando $x \to 0$

3. $$\lim_{x\to p} \frac{\text{tg}\,(x-p)}{x^2-p^2} = \lim_{x\to p} \frac{\text{tg}\,(x-p)}{(x-p)(x+p)} = \lim_{h\to 0} \frac{\text{tg}\,(h)}{h(h+2p)} = \frac{1}{2p}$$

   Fazendo $h = x - p$ temos que $h \to 0$ quando $x \to p$

4. Como temos um módulo no denominador e $x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x-1)$ tem sinais diferentes à esquerda e à direita de 3, vamos calcular os limites laterais.

   $$\lim_{x\to 3^-} \frac{\text{sen}\,(x-3)}{|x^2-2x-3|} = \lim_{x\to 3^-} \frac{\text{sen}\,(x-3)}{-(x-3)(x+1)} = \lim_{x\to 3^-} \frac{-1}{x+1} \cdot \lim_{x\to 3^-} \frac{\text{sen}\,(x-3)}{x-3} = \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot \lim_{t\to 0^-} \frac{\text{sen}\,(t)}{t} = -\frac{1}{4}$$

   Como $x \lesssim 3$ (menor que 3 mas perto suficiente) temos que $x - 3 < 0$ e $x + 1 > 0$. Então $x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1) < 0$

   Fazendo $t = x - 3$ temos que $t \to 0^-$ quando $x \to 3^-$

   Analogamente, $\displaystyle\lim_{x\to 3^+} \frac{\text{sen}\,(x-3)}{|x^2-2x-3|} = \frac{1}{4}$, portanto $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{\text{sen}\,(x-3)}{|x^2-2x-3|}$ não existe.

5. $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-\operatorname{sen} x}{2x-\pi} = \lim_{t\to 0} \frac{1-\operatorname{sen}\left(t+\frac{\pi}{2}\right)}{2t} = \lim_{t\to 0} \frac{1-\operatorname{sen}(t)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)-\cos(t)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2t}$

Tomando $t = x - \frac{\pi}{2}$, temos que $t \to 0$ quando $x \to \frac{\pi}{2}$

abrindo o seno da soma: $\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)$

$\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}) = 1$ e $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{1-\cos(t)}{2t} = \lim_{t\to 0}\frac{1-\cos(t)}{2t}\cdot\frac{1+\cos(t)}{1+\cos(t)}$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{1-\cos^2(t)}{2t\cdot(1+\cos(t))} = \lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2(t)}{2t\cdot(1+\cos(t))} = \frac{1}{2}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{sen}(t)}{t}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{sen}(t)}{1+\cos(t)} = 0$$

$\operatorname{sen}^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$

$\lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{sen}(t)}{t} = 1$ e $\lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{sen}(t)}{1+\cos(t)} = 0$

Solução do Exercício 11

1. $\displaystyle\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{|x-1|} = \lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x-1} = +\infty$

2. $\displaystyle\lim_{x\to 3^-}\frac{2x+7}{(3-x)^2} = +\infty$

3. Neste item temos uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$, $\displaystyle\lim_{x\to 5^-}\frac{x-5}{|x^2-7x+10|} = \lim_{x\to 5^-}\frac{x-5}{|(x-2)(x-5)|} = \lim_{x\to 5^-}\frac{-1}{x-2} = -\frac{1}{3}$

4. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+1)^2}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2x+1}{x} = \lim_{x\to+\infty} x+2+\frac{1}{x} = +\infty$

5. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\sqrt[3]{x^5+3x-8} = -\infty$

Nos itens 6–11 temos indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$.

6. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x-5}{x^2+3x+4} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{5}{x}}{x+3+\frac{4}{x}} = 0$

7. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x-3}{7x+2} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1-\frac{3}{x}}{7+\frac{2}{x}} = \frac{1}{7}$

8. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-2}{3-x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x-\frac{2}{x}}{\frac{3}{x}-1} = -\infty$

9. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x+2}{\sqrt{9x^2-3}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x+2}{|x|\sqrt{9-\frac{3}{x^2}}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x+2}{-x\sqrt{9-\frac{3}{x^2}}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1+\frac{2}{x}}{-\sqrt{9-\frac{3}{x^2}}} = -\frac{1}{3}$

como $x\to-\infty$ então $x<0$. Assim que $|x| = -x$

10. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{9x+3}{\sqrt[3]{8x^3-3}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{9x+3}{x\ \sqrt[3]{8-\frac{3}{x^3}}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{9+\frac{3}{x}}{\sqrt[3]{8-\frac{3}{x^3}}} = \dfrac{9}{2}$

11. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+1}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\dfrac{x+\sqrt{x}}{x+1}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\dfrac{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}{1+\frac{1}{x}}} = 1$

Nos itens 12 e 13 temos indeterminação do tipo $\infty - \infty$

12. $$\lim_{x\to+\infty} x(\sqrt{x^2+5}-x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x(\sqrt{x^2+5}-x)(\sqrt{x^2+5}+x)}{\sqrt{x^2+5}+x}$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x(x^2+5-x^2)}{\sqrt{x^2+5}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{5x}{\sqrt{x^2+5}+x} = \frac{5}{2}$$

Vamos usar a igualdade $a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$
considerando $a = \sqrt[3]{x^3+2}$ e $b = \sqrt[3]{x^3-2}$

13. $$\lim_{x\to-\infty} (\sqrt[3]{x^3+2} - \sqrt[3]{x^3-2}) = \lim_{x\to-\infty} \frac{\left(\sqrt[3]{x^3+2} - \sqrt[3]{x^3-2}\right)\left((\sqrt[3]{x^3+2})^2 + \sqrt[3]{x^3+2}\sqrt[3]{x^3-2} + (\sqrt[3]{x^3-2})^2\right)}{(\sqrt[3]{x^3+2})^2 + \sqrt[3]{x^3+2}\sqrt[3]{x^3-2} + (\sqrt[3]{x^3-2})^2}$$
$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3+2-(x^3-2)}{(\sqrt[3]{x^3+2})^2 + \sqrt[3]{x^3+2}\sqrt[3]{x^3-2} + (\sqrt[3]{x^3-2})^2}$$
$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{4}{(\sqrt[3]{x^3+2})^2 + \sqrt[3]{x^3+2}\sqrt[3]{x^3-2} + (\sqrt[3]{x^3-2})^2} = 0$$

Solução do Exercício 12

1. D(f)=$\mathbb{R} \setminus \{1\}$

   Assíntota horizontal: $y = 3$, pois $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x}{x-1} = 3$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x}{x-1} = 3$.

   Assíntota vertical: $x = 1$, pois $\lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{3x}{x-1} = +\infty$ $\left(\text{e } \lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{3x}{x-1} = -\infty\right)$.

2. D(f)=$\mathbb{R}$
   Assíntota horizontal: $y = -2$ e $y = 2$, pois
   $$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2+4}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{|x|\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{-x\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}} = -2$$

   Como $x \to -\infty$ então $x < 0$
   Assim $|x| = -x$

   e similarmente
   $$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2+4}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{x\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}} = 2.$$

   Assíntota vertical: Não possui assíntota vertical

3. D(f)=$\mathbb{R} \setminus \{0, 3/2\}$

   Assíntota horizontal: $y = 1$, pois $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^2+1}{2x^2-3x} = 1$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2+1}{2x^2-3x} = 1$.

   Assíntota vertical: $x = 0$ e $x = \dfrac{3}{2}$, pois
   $$\lim_{x\to0^-} \frac{2x^2+1}{2x^2-3x} = +\infty \quad \text{assim como} \quad \lim_{x\to0^+} \frac{2x^2+1}{2x^2-3x} = -\infty$$

e

$$\lim_{x \to \frac{3}{2}^-} \frac{2x^2+1}{2x^2-3x} = -\infty \quad \text{assim como} \quad \lim_{x \to \frac{3}{2}^+} \frac{2x^2+1}{2x^2-3x} = +\infty.$$

Solução do Exercício 13

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^2+bx-1}{x+2}-ax\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{(3-a)x^2+(b-2a)x-1}{x+2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3-a=0 \\ b-2a=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=6 \end{cases}.$$

Solução do Exercício 14

1. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$
2. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 6$
3. $\lim_{x\to10^-} f(x) = -\infty$
4. $\lim_{x\to10^+} f(x) = f(10) = 16$
5. Assíntota horizontal: $y=6$. Assíntota vertical: $x=10$.

Solução do Exercício 15

1. Se $f(x)=x$ e $g(x)=x^2$, teremos

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} x = 0, \qquad \lim_{x\to0^+} g(x) = \lim_{x\to0^+} x^2 = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to0^+}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to0^+}\frac{x}{x^2} = \lim_{x\to0^+}\frac{1}{x} = +\infty$$

2. Se $f(x)=1/x^2$ e $g(x)=1/x$, teremos

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2} = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0$$

3. Se $f(x)=x+1$ e $g(x)=x$, teremos

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to0^+}\frac{x+1}{x} = +\infty \qquad \text{e} \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x} = 1$$

4. Se $f(x)=x+1$ e $g(x)=x^2$, teremos

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to0^+}\frac{x+1}{x^2} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x^2} = 0.$$

Solução do Exercício 16

1. Como $-1 \leqslant \operatorname{sen}(x) \leqslant 1$, temos

$$-|x| \leqslant x\,\operatorname{sen}(x) \leqslant |x|,$$

logo, como

$$\lim_{x\to0} -|x| = \lim_{x\to0} |x| = 0,$$

temos, pelo Teorema do Confronto,

$$\lim_{x\to 0} x\ \mathrm{sen}(x) = 0.$$

2. Como $-1 \leq \mathrm{sen}(x) \leq 1$ então temos

$$4x^3 + 3x - 1 \leqslant 4x^3 + 3x + \mathrm{sen}(x) \leqslant 4x^3 + 3x + 1.$$

Para x suficientemente grande, $3x^3 - x^2 > 0$, logo

$$\frac{4x^3 + 3x - 1}{3x^3 - x^2} \leqslant \frac{4x^3 + 3x + \mathrm{sen}(x)}{3x^3 - x^2} \leqslant \frac{4x^3 + 3x + 1}{3x^3 - x^2}.$$

Como

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{4x^3 + 3x - 1}{3x^3 - x^2} = \frac{4}{3} \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{4x^3 + 3x + 1}{3x^3 - x^2} = \frac{4}{3}$$

temos, pelo Teorema do Confronto,

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{4x^3 + 3x + \mathrm{sen}(x)}{3x^3 - x^2} = \frac{4}{3}.$$

3. Como $-1 \leqslant \mathrm{sen}(e^x) \leqslant 1$ e $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$, temos $-2 \leqslant 2\,\mathrm{sen}(e^x)\cos(x) \leqslant 2$, logo

$$x^2 + 3x - 2 \leqslant x^2 + 3x + 2\,\mathrm{sen}(e^x)\cos(x) \leqslant x^2 + 3x + 2$$

Para x muito negativo, $x^2 + 2x > 0$, logo

$$\frac{x^2 + 3x - 2}{x^2 + 2x} \leqslant \frac{x^2 + 3x + 2\,\mathrm{sen}(e^x)\cos(x)}{x^2 + 2x} \leqslant \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + 2x}.$$

Como

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2 + 3x - 2}{x^2 + 2x} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + 2x} = 1.$$

Assim, pelo Teorema do Confronto,

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2 + 3x + 2\,\mathrm{sen}(e^x)\cos(x)}{x^2 + 2x} = 1.$$

Solução do Exercício 17

Temos que

$$-x^2 + 3x \leqslant f(x) \leqslant \frac{x^2 - 1}{x - 1}.$$

Ainda mais,

$$\lim_{x\to 1} -x^2 + 3x = 2 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1}(x + 1) = 2.$$

Logo, pelo Teorema do Confronto,

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 2.$$

Solução do Exercício 18

Como $|f(x) - 3| \leqslant 2|x - 1|$, temos

$$-2|x - 1| \leqslant f(x) - 3 \leqslant 2|x - 1|.$$

Como
$$\lim_{x\to 1} -2|x-1| = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 1} -2|x-1| = 0$$
pelo Teorema do Confronto, temos
$$\lim_{x\to 1} (f(x)-3) = 0.$$
Com isso,
$$\lim_{x\to 1} f(x) = 3.$$
$$\downarrow$$
$$\boxed{0 = \lim_{x\to 1} (f(x)-3) = \lim_{x\to 1} f(x) - \lim_{x\to 1} 3 = \left(\lim_{x\to 1} f(x)\right) - 3}$$

Solução do Exercício 19

Como $0 \leq |f(x)| \leq x^4$ então, para $x \neq 0$ temos
$$0 \leq \left|\frac{f(x)}{x}\right| \leq \frac{x^4}{|x|} = |x|^3.$$
Portanto
$$-|x|^3 \leq \left|\frac{f(x)}{x}\right| \leq |x|^3$$
e assim temos
$$-|x|^3 \leq \frac{f(x)}{x} \leq |x|^3.$$
Como $\lim\limits_{x\to 0} -|x|^3 = 0$ e $\lim\limits_{x\to 0} |x|^3 = 0$. Então, pelo Teorema do Confronto, temos
$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 0.$$